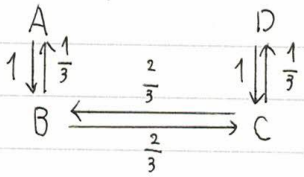
2004年　東大数学　文系第4問　理系第6問　②

文系(2)　(2k+1回後に、BWW、WBW、WWBの確率)

n回の操作後にA、B、C、Dになる確率を
a_n b_n c_n d_n とする。　$b_n = P_n$ だが、わかり
求める確率は $P_{2k+1} = b_{2k+1}$ である。やすいため、b_n で進める。

遷移図より



← 1枚目の別解と同じです

漸化式をたてると

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3} c_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + d_n & \cdots ③ \\ d_{n+1} = \frac{1}{3} c_n & \cdots ④ \end{cases}$$

以下、漸化式を解くだけ。

①を②に代入して、$b_{n+1} = \frac{1}{3} b_{n-1} + \frac{2}{3} c_n$ …②′

④を③に代入して、$c_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{3} c_{n-1}$ …③′

②′ ⇔ $c_n = \frac{3}{2} b_{n+1} - \frac{1}{2} b_{n-1}$ を③′に代入して、

$\frac{3}{2} b_{n+2} - \frac{1}{2} b_n = \frac{2}{3} b_n + \frac{3}{2} b_n - \frac{1}{2} b_{n-2}$　整理して、

$b_{n+2} - \frac{10}{9} b_n + \frac{1}{9} b_{n-2} = 0$

↓ nをずらして、

$b_{n+4} - \frac{10}{9} b_{n+2} + \frac{1}{9} b_n = 0$

↓ $n = 2k+1$ として、

$b_{2k+5} - \frac{10}{9} b_{2k+3} + \frac{1}{9} b_{2k+1} = 0$

↓ $b_{2k+1} = B_k$ とおく、

$B_{k+2} - \frac{10}{9} B_{k+1} + \frac{1}{9} B_k = 0$ ← ふつうの3項間漸化式になった

この3項間漸化式を解くと、

$B_k = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k$　$B_k = b_{2k+1} = P_{2k+1}$ なので、

$P_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k$ //

理系(2)　(n回後に、WWWまたはWBWの確率)

遷移図の性質により、nが偶数のときAかC、
nが奇数のときBかDとなる。

左の結果より、$P_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k$ だが、

$n = 2k+1 \Leftrightarrow k = \frac{n-1}{2}$ を代入して、

$P_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

WBW、BWW、WWBは、対称性から、すべて等確率なので、
WBWの確率は $\frac{1}{3} P_n$ である。

よって、$\frac{1}{3} P_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ //　左の漸化式を、ふつうに解いてもよい。

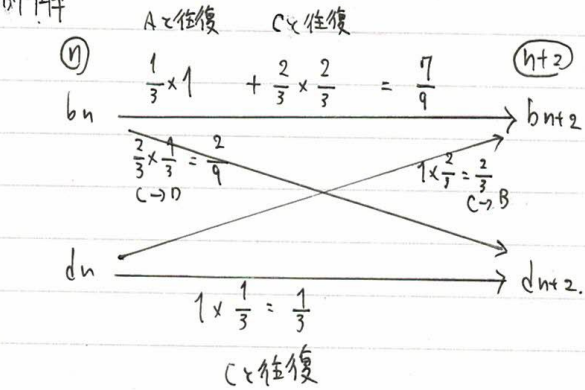
WWWの確率は、a_n であるが、
漸化式①から、$a_n = \frac{1}{3} b_{n-1}$ である。

$a_n = \frac{1}{3} \cdot b_{n-1} = \frac{1}{3} \cdot P_{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ //

以上より、nが偶数のとき　$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
nが奇数のとき　$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ //

文系(2)　別解



よって　$b_{n+2} = \frac{7}{9} b_n + \frac{2}{3} d_n$
$d_{n+2} = \frac{2}{9} b_n + \frac{1}{3} d_n$　あとは解く。

東大合格 敬天塾　©敬天塾　著作権者に無断で文章や画像等の著作物を転載することは、法律で禁止されています。